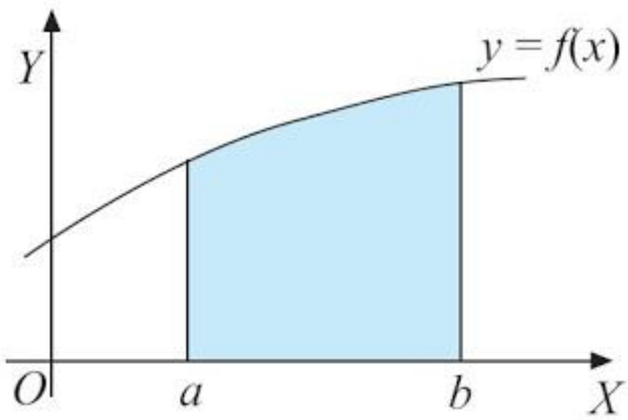
Integral Tertentu

1. Pengertian Integral sebagai Luas Suatu Bidang Datar

Kalian pasti sudah pernah mempelajari perhitungan luas bangun datar. Bangun datar apa saja yang sudah kalian kenal? Bangun datar yang kalian kenal pasti merupakan bangun datar beraturan, misalnya segitiga, segi empat, lingkaran, dan sebagainya.



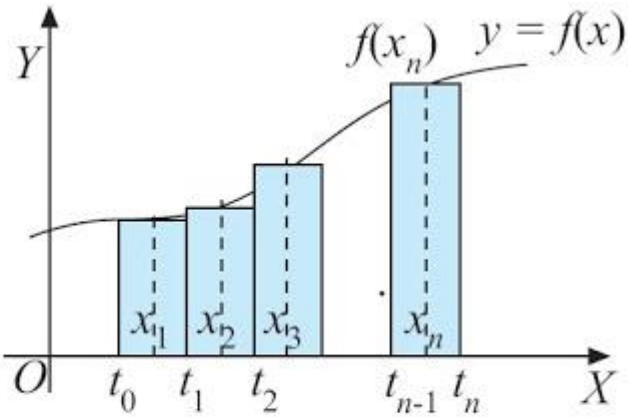
Gambar 2. Bangun datar yang dibatasi kurva y = f(x), sumbu X, serta garis x = a dan y = b.

Perhatikan Gambar 2. Apakah gambar daerah yang diarsir tersebut merupakan bangun datar yang sudah kalian kenal?

Termasuk bangun apakah gambar daerah tersebut? Dapatkah kalian menentukan luas bangun datar tersebut dengan rumus yang sudah kalian kenal? Tentu saja tidak. Daerah atau bangun datar pada Gambar 2. merupakan bangun datar yang dibatasi kurva y = f(x), sumbu X, serta garis x = a dan y = b.

Untuk memahami pengertian integral sebagai luas suatu bidang datar, perhatikan Gambar 2. Daerah yang diarsir adalah suatu daerah yang dibatasi kurva y = f(x) dan sumbu X dari a sampai b. Dimisalkan fungsi y = f(x) terdefinisi pada interval tertutup [a, b].

Bagilah interval tertutup tersebut menjadi n buah subinterval yang sama lebar sehingga terdapat n buah titik tengah, yaitu x_1, x_2, x_3, ..., xn, dengan $x_1 = ½ (t_0 + t_1)$, $x_2 = ½ (t_1 + t_2)$, ..., $x_n = ½ (t_{n-1} + t_n)$ (perhatikan Gambar 3). Dimisalkan ujung paling kiri interval adalah $t_0 = a$ dan ujung paling kanan adalah $t_n = b$ dengan $a < t_1 < t_2 \ldots < t_{n-1} < b$.



Gambar 3. Interval tertutup tersebut menjadi n buah subinterval yang sama lebar sehingga terdapat n buah titik tengah.

Misalkan panjang tiap subinterval adalah $t_i - t_{i-1} = \Delta x$. Pada tiap subinterval $[t_{i-1}, t_i]$, tempatkan sebuah titik x (tidak harus di tengah, boleh sama dengan titik ujungnya).

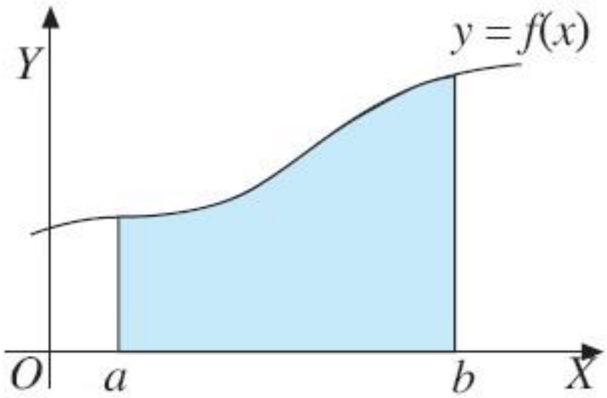
Domain fungsi y = f(x) dibagi menjadi n buah subinterval dengan alas Δx dan tinggi $f(x_i)$ sehingga membentuk pias-pias persegi panjang. Luas masing-masing persegi panjang adalah $f(x_i)\,\Delta x$. Jika semua luas persegi panjang dijumlahkan maka diperoleh :

$$J = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x\ .$$

$$J = (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n))\,\Delta x$$

$$J = \sum_{r=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

dengan Σ merupakan notasi jumlah yang berurutan. J disebut dengan jumlahan Riemann. Notasi ini pertama kali digunakan oleh Bernhard Riemann.



Gambar 4. Jumlahan Riemann itu mendekati luas daerah yang diarsir.

Jika banyak pias n mendekati tak berhingga ($n \to \infty$), jumlahan Riemann itu mendekati luas daerah dari Gambar 4. Oleh sebab itu, luas L dapat ditulis dalam bentuk :

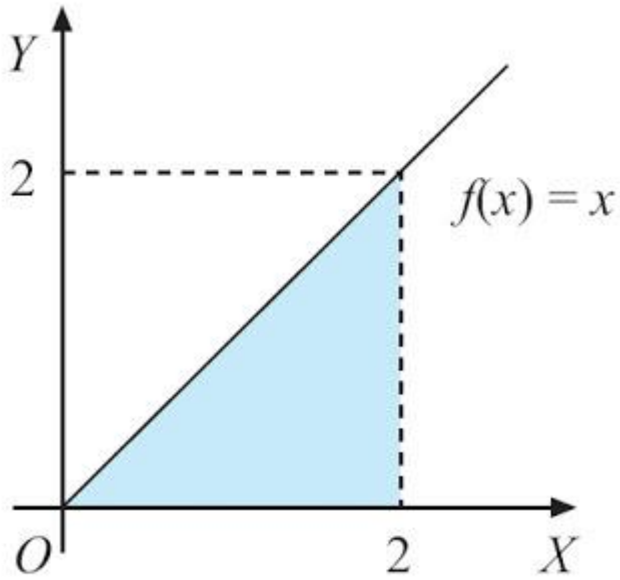
$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x$ .... (1)

Jika $n \to \infty$ maka $\Delta x \to 0$.

Integral tertentu f dari a sampai b dinyatakan dengan $\int_a^b f(x)\,dx$ dan oleh Riemann nilainya didefinisikan sebagai :

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x$ .... (2)

Dari definisi integral tertentu di atas dapat dikatakan $\int_a^b f(x)\,dx$ menyatakan luas daerah yang dibatasi oleh garis x = a, garis x = b, kurva y = f(x), dan sumbu X.



Gambar 5. luas daerah yang dibatasi oleh garis x = a, garis x = b, kurva y = f(x), dan sumbu X.

Perhatikan bahwa substitusi (1) dan (2) menghasilkan :

$L = \int_a^b f(x)\,dx$ .... (3)

Sekarang kita misalkan $\int f(x)\,dx = F(x) + c$. Luas L di atas merupakan fungsi dari x dengan $x \in [a, b]$ berbentuk :

$L(x) = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) + c$

Jika nilai t ada pada interval [a, b], yaitu $\{x \mid a \le x \le b\}$ kita dapat mendefinisikan luas L sebagai fungsi dari t berbentuk :

$L(t) = \int_a^t f(x)\,dx = F(t) + c$

Akibat dari pemisalan di atas, akan diperoleh :

$L(a) = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) + c = 0.$

Sebab luas daerah dari x = a hingga x = a berbentuk ruas garis sehingga luasnya sama dengan nol. Karena L(a) = 0 maka diperoleh :

F(a) + c = 0 atau c = –F(a) .... (4)

Akibat lain dari pemisalan itu, akan diperoleh

$L(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) + c$ .... (5)

Hasil substitusi dari persamaan (4) ke (5), diperoleh :

$$L(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa jika L adalah luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), sumbu X, garis x = a dan garis x = b maka :

$$L = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

2. **Pengertian Integral Tertentu**

Kalian tahu bahwa :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

menyatakan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), sumbu X, garis x = a, dan garis x = b.

Misalkan f kontinu pada interval tertutup [a, b] atau $a \leq x \leq b$.

Jika F suatu fungsi sedemikian rupa sehingga F'(x) = f(x) untuk semua x pada [a, b], berlaku :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [f(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

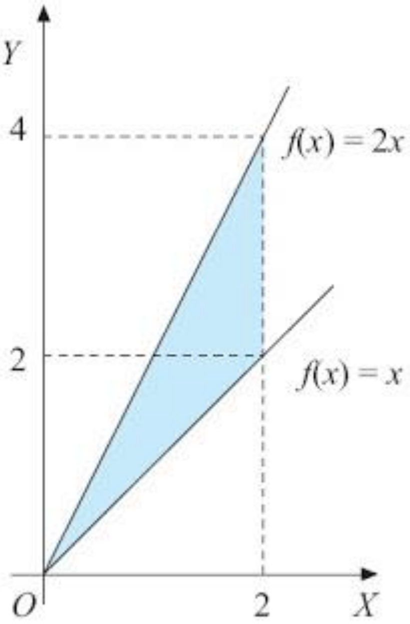
F(x) adalah antiturunan dari f(x) pada $a \leq x \leq b$.

Menggambar Daerah yang Dibatasi oleh Kurva

Tentu kalian masih ingat bagaimana menggambar grafik fungsi linear, fungsi kuadrat, maupun fungsi trigonometri. Grafik fungsi-fungsi tersebut banyak dibahas di sini, berkaitan dengan pencarian luas daerah yang batasi oleh kurva. Bagaimana cara menggambarkan daerah itu? Misalkan kita akan menggambar daerah yang dibatasi oleh kurva f(x) = x dari x = 0 sampai x = 2, sumbu X, dan garis x = 2.

Langkah pertama adalah menggambar grafik f(x) = x.

Kemudian, tarik garis batasnya, yaitu dari x = 0 sampai x = 2 hingga memotong kurva. Arsir daerah yang berada di bawah kurva f(x) = x dari x = 0 sampai x = 2 dan di atas sumbu X. Hasilnya tampak seperti gambar di bawah ini.



Gambar 6. Menggambar Daerah yang Dibatasi oleh Kurva.

Bagaimana jika daerah yang akan digambar dibatasi oleh dua kurva? Pada dasarnya sama dengan cara di atas. Misalkan kita akan menggambar daerah yang dibatasi oleh grafik f(x) = x dan g(x) = 2x dari x = 0 sampai x = 2 dan garis x = 2.

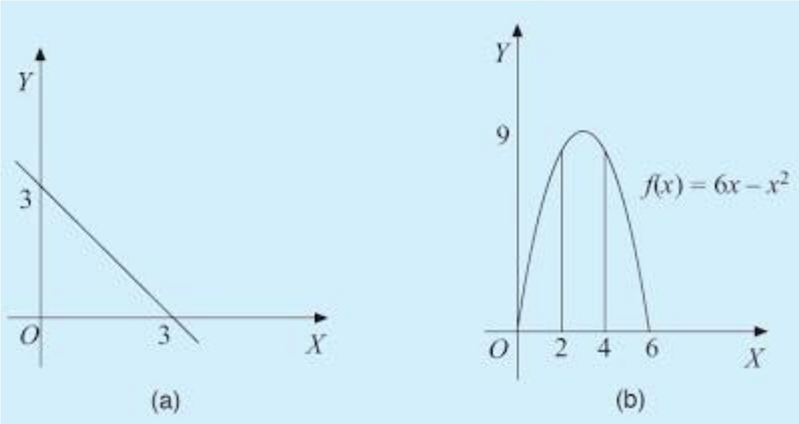
Terlebih dahulu, kita gambar f(x) = x dan g(x) = 2x pada bidang koordinat. Tarik garis batasnya, yaitu x = 0 dan x = 2 hingga memotong kedua grafik. Kemudian, arsir daerah yang dibatasi oleh grafik itu dari x = 0 sampai x = 2. Hasilnya tampak seperti gambar di samping.

Cobalah kalian gambar daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut.

1. f(x) = x^2 dan sumbu X
2. f(x) = x^2 dan g(x) = x
3. f(x) = x^2 dan g(x) = x^3

Contoh Soal 7 :

Tentukan integral tertentu untuk menghitung luas daerah yang diarsir pada gambar-gambar berikut.



Gambar 7. Menghitung luas daerah yang diarsir menggunakan integral tertentu.

Kunci Jawaban :

a. Gambar 7 (a) merupakan grafik garis lurus yang melalui titik (0, 3) dan (3, 0) maka persamaan garisnya adalah x + y = 3 atau y = 3 – x. Untuk batas kiri adalah sumbu Y, berarti x = 0 dan batas kanan adalah x = 3. Jadi, luas daerahnya dapat dinyatakan dengan $\int_0^3 (3 - x)\, dx$

b. Gambar 7 (b) merupakan suatu daerah yang dibatasi oleh sumbu X dan kurva y = f(x). Karena kurva memotong sumbu X di titik (0, 0) dan (6, 0) maka y = $6x - x^2$. Untuk batas kiri adalah garis x = 2 dan batas kanan adalah x = 4. Jadi, luas daerahnya dapat dinyatakan dengan $\int_2^4 (6x - x^2)\, dx$.

Contoh Soal 8 :

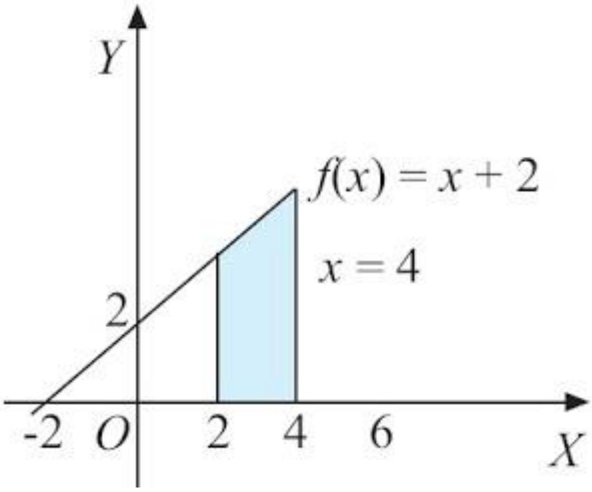
Gambarkan daerah-daerah yang luasnya dinyatakan dengan integral berikut.

a. $\int_2^4 (x + 2)\, dx$

b. $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$

Pembahasan :

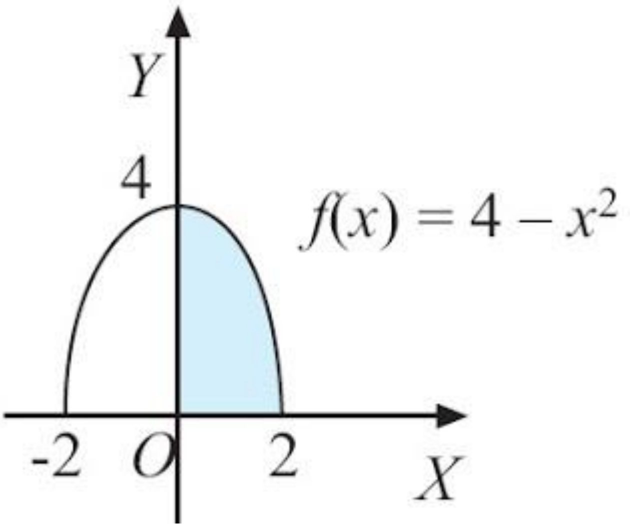
a. Grafik y = f(x) = x + 2 mempunyai titik potong (0, 2) dan (–2, 0) sehingga $\int_{2}^{4}$ (x + 2) dx dapat digambarkan seperti pada Gambar 8.



Gambar 8. Grafik y = f(x) = x + 2.

b. $\int_{0}^{2}$ (4 - x^2) dx

Diketahui f(x) = 4 – x^2 dengan batas bawah x = 0 dan batas atas x = 2. Kurva f(x) = 4 – x^2 merupakan parabola dengan titik potong (–2, 0) dan (2, 0) yang membuka ke bawah. Dengan demikian, daerah tersebut dapat digambarkan seperti pada Gambar 9.



Gambar 9. Kurva f(x) = 4 – x^2

Contoh Soal 9 :

Tentukan nilai-nilai integral berikut.

a. $\int_{-1}^{1} (x + 3)\, dx$

b. $\int_{2}^{4} (x^3 - x)\, dx$

Penyelesaian :

a. $\int_{-1}^{1} (x+3)\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^{1}$

$= \left[\frac{1}{2}(1)^2 + 3(1)\right] - \left[\frac{1}{2}(-1)^2 + 3(-1)\right]$

$= 6$

b. $\int_{2}^{4} (x^3 - x)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{2}^{4}$

$= (\frac{1}{4}(4)^4 - \frac{1}{2}(4)^2) - (\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{1}{2}(2)^2)$

$= 54$

3. **Sifat-Sifat Integral Tertentu**

Integral sebenarnya dapat ditentukan dengan mudah. Untuk mempermudah perhitungan integral, kalian dapat memanfaatkan sifat-sifat integral. Agar kalian menemukan sifat-sifat integral, perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh Soal 10 :

Hitunglah nilai integral dari fungsi berikut.

a. $\int_{2}^{2} (2x + 4)\, dx$

b. $\int_{0}^{2} (3x^2 + 4)\, dx$

c. $\int_{2}^{0} (3x^2 + 4)\, dx$

Jawaban :

a. $\int_{0}^{2} (2x + 4)\, dx = \left[x^2 + 4x\right]_2^2$

$= \left[2^2 + 4(2)\right] - \left[2^2 + 4(2)\right]$

$= (4 + 8) - (4 + 8) = 12 - 12 =$

b. $\int_{0}^{2} \left(3x^2 + 4x\right) dx = \left[x^3 + 2x^2\right]_2^2$

$= \left[2^2 + 2(2)^2\right] - \left[0^3 + 2(0)^2\right]$

$= (8 + 8) - (0 + 0) = 16$

c. $\int_{2}^{0} \left(3x^2 + 4x\right) dx = \left[x^3 + 2x^2\right]_2^0$

$= \left[0^3 + 2(0)^2\right] - \left[2^3 + 2(2)^2\right]$

$= 0 - (8 + 8) = -16$

d. Dari hasil perhitungan b dan c tampak bahwa

$$\int_{0}^{2} \left(3x^2 + 4x\right) dx = -\int_{2}^{0} \left(3x^2 + 4x\right) dx$$

Contoh Soal 12 :

Tentukan nilai-nilai integral berikut.

a. $\int_{1}^{2} 6x^2\, dx$

b. $6 \int_{1}^{2} x^2\, dx$

c. $\int_{2}^{3} (5x^4 + 2x)\, dx$

d. $\int_{2}^{3} 5x^4\, dx + \int_{2}^{3} 2x\, dx$

e. Dari nilai integral pada bagian a sampai dengan d tersebut, apa yang dapat kalian simpulkan dari hubungan tersebut?

Penyelesaian :

a. $\int_1^2 6x^2\,dx = \left[3x^3\right]_1^2 = \left[3(2)^3\right] - \left[3(1)^3\right] = 16 - 2 = 14$

b. $6\int_1^2 x^2\,dx = 6\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = 6\left\{\left[\frac{1}{3}(2)^3\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3\right]\right\}$

$= 6\left\{\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right\} = 6\left(\frac{7}{3}\right) = 14$

c. $\int_2^3 \left(5x^4 + 2x\right)dx = \left[x^5 + x^2\right]_2^3 = (3^5 + 3^2) - (2^5 + 2^2)$

$= (243 + 9) - (32 + 4$

$= 252 - 36 = 216$

d. 1) $\int_2^3 5x^4\,dx = \left[x^5\right]_2^3 = 3^5 - 2^5 = 243 - 32 = 211$

2) $\int_2^3 2x\,dx = \left[x^2\right]_2^3 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$

Jadi, $\int_2^3 5x^4\,dx + \int_2^3 2x\,dx = 211 + 5 = 216.$

e. Tampak dari keempat nilai di atas diperoleh hubungan sebagai berikut.

1) $\int_1^2 6x^2\,dx = 6\int_1^2 x^2\,dx$

2) $\int_2^3 \left(5x^4 + 2x\right)dx = \int_2^3 5x^4\,dx + \int_2^3 2x\,dx$

Contoh Soal 13 :

a. $\int_1^4 4x^3\,dx$

b. $\int_1^2 4x^3\,dx + \int_2^4 4x^3\,dx$

c. Dari hasil a dan b, apa kesimpulan kalian?

Jawaban :

a. $\int_1^4 4x^3\,dx = \left[x^4\right]_1^4 = 4^4 - 1^4 = 256 - 1 = 255$

b. $\int_1^2 4x^3\,dx + \int_2^4 4x^3\,dx = \left[x^4\right]_1^2 + \left[x^4\right]_2^4$

$= (2^4 - 1^4) + (4^4 - 2^4)$

$= (16 - 1) + (256 - 16)$

$= 15 + 240 = 255$

c. Tampak dari hasil a dan b bahwa $\int_1^4 4x^3\,dx =$

$\int_1^2 4x^3\,dx + \int_2^4 4x^3\,dx$

Dari contoh-contoh di atas maka dapat dituliskan sifat-sifat integral sebagai berikut.

Misalkan f(x) dan g(x) adalah fungsi-fungsi kontinu pada [a, b], berlaku sebagai berikut.

a. $\int_a^a$ f (x) dx = 0

b. $\int_a^b$ c f (x) dx = c $\int_a^b$ f (x) dx , dengan c = konstanta

c. $\int_a^b$ f (x) dx = - $\int_a^b$ f (x) dx

d. $\int_a^b$ [f (x) ± g(x)] dx = $\int_a^b$ f (x) dx + $\int_a^b$ g(x) dx

e. $\int_a^c$ (x) dx + $\int_a^b$ f (x) dx = $\int_a^b$ f (x) dx, dengan a ≤ c ≤ b

D. **Pengintegralan dengan Substitusi**

Salah satu cara untuk menyelesaikan hitung integral adalah dengan substitusi. Beberapa bentuk integral yang dapat diselesaikan dengan melakukan substitusi tertentu ke dalam fungsi yang diintegralkan, misalnya bentuk $\int u^n du$. Bagaimana cara menyelesaikannya? Untuk itu, perhatikan uraian berikut.

Pada pembahasan sebelumnya, diperoleh

$$\int x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c.$$

Oleh karena itu, untuk menyelesaikan integral bentuk $\int (f(x))^n\, dx$ maka kita dapat menggunakan substitusi u = f(x) sehingga integral tersebut berbentuk $\int u^n du$. Dengan demikian, diperoleh $\int u^n du = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$. Oleh karena itu, dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\int (f(x))^n\, d(f(x)) = \int u^n du = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

dengan u = f(x) dan $n \neq -1$.

Contoh Soal 14 :

Tentukan hasil integral berikut.

a. $\int (2x + 6)(x^2 + 6x + 3)^7\, dx$

b. $\int (x^2 - 8x + 1)(x - 4)dx$

Pembahasan :

a. $\int (2x + 6)(x^2 + 6x + 3)^7\, dx = \int (x^2 + 6x + 3)^7 (2x + 6)\, dx$

Cara 1:

Misalkan u = $x^2 + 6x + 3 \leftrightarrow du/dx = 2x + 6$

$\leftrightarrow du = (2x + 6)\, dx$.

Oleh karena itu,

$\int (x^2 + 6x + 3)^7 (2x + 6)\, dx = \int u^7\, du$

$= 1/8\, u^8 + c$

$= 1/8\, (x^2 + 6x + 3)^8 + c$

Cara 2:

$\int (2x + 6)(x^2 + 6x + 3)^7\, dx = \int (x^2 + 6x + 3)^7\, d\,(x^2 + 6x + 3)$

$= 1/8\, (x^2 + 6x + 3)^8 + c$

b. $\int (x^2 - 8x + 1)(x - 4)\, dx$

Cara 1:

Misalkan u = $x^2 - 8x + 1$.

$du/dx = 2x - 8 \leftrightarrow 1/2\, du = (x - 4)\, dx$

Oleh karena itu,

$\int (x^2 - 8x + 1)(x - 4)dx = u.\ ½\, du = ½ \int u\, du = ½\, (1/2\, u^2) + c = ¼\, u^2 + c = ¼\, (x^2 - 8x + 1)^2 + c$

Cara 2:

$\int (x^2 - 8x + 1)(x - 4)dx$

$= \int (x^2 - 8x + 1)\ ½\ d\ (x^2 - 8x + 1)$

$= ½ \int (x^2 - 8x + 1)\ d(x^2 - 8x + 1)$

$= ½\ (1/2\ (x^2 – 8x + 1)^2) + c$

$= ½\ (x^2 – 8x + 1)^2 + c$

Tentukan integral berikut.

a. $\int x \sqrt{x^2 - 1}\ dx$

b. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + 1}}\ dx$

Jawab:

a. $\int x \sqrt{x^2 - 1}\ dx$

Misalkan $u = x^2 – 1 \leftrightarrow du = 2x\ dx$ sehingga $x\ dx = ½\ du$

$\int x \sqrt{x^2 - 1}\ dx = \int \sqrt{u}\ ½\ du = 1/2 \int u^{\frac{1}{2}} du$

b. $\int \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 + 1}}\ dx$

Misalkan $u = 2x^3 + 1 \leftrightarrow du = 6x^2\ dx$ sehingga $3x^2\ dx = ½\ du$

$$\int \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3+1}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}du}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}u^{-\frac{1}{2}+1}\right]+c$$

$$= \frac{1}{2}(2u^{\frac{1}{2}})+c$$

$$= \sqrt{u}+c$$

$$= \sqrt{2x^3+1}+c$$

Bagaimana jika integral yang akan ditentukan adalah integral tertentu? Caranya sama saja dengan integral tak tentu. Hanya, yang perlu diperhatikan adalah batas integrasinya. Batas integrasi dapat digunakan variabel sebelum substitusi maupun variabel substitusi. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh Soal 15 :

Tentukan nilai dari $\int_0^1 x\sqrt{x^2-1}$ dx.

Jawaban :

Misalkan u = x^2 – 1 ↔ du = 2x sehingga ½ du = xdx

Penentuan batas integrasi

Batas bawah: Untuk x = 0 maka u = 0^2 – 1 = –1.

Batas atas: Untuk x = 1 maka u = 1^2 – 1 = 0.

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2-1}dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{u}\,\frac{1}{2}du$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} u^{\frac{1}{2}} du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1}\right]_{-1}^{0}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}$$
$$= \frac{1}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}$$
$$= 0-(-1)$$
$$= 1$$

Jika kalian menggunakan variabel sebelum substitusi, yaitu x maka terlebih dahulu dicari integralnya. Setelah itu, substitusikan nilai x itu. Jadi, setelah diperoleh hasil $\int x\sqrt{x^{2-1}}\,dx = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$, substitusikan batas-batas x.

$$\left[\frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

Kalian akan memperoleh hasil yang sama. Coba kalian uji.

E. **Integral Parsial**

Kadang-kadang, bentuk integral $\int$ u dv, dengan u dan v merupakan fungsi-fungsi dalam variabel x, sangat sulit dikerjakan, sedangkan $\int$ v du lebih mudah dikerjakan. Jika kita menjumpai bentuk seperti itu maka kita perlu mengetahui hubungan antara kedua integral tersebut untuk memperoleh penyelesaian $\int$ u dv.

Misalnya y = uv dengan y = y(x), u = u(x), dan v = v(x) merupakan fungsi diferensiabel. Jika fungsi y diturunkan maka diperoleh :

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$\leftrightarrow$ dy = u dv + v du

$\leftrightarrow$ d(uv) = u dv + v du

Jika kedua ruas persamaan di atas diintegralkan maka diperoleh :

$\int$ d(uv) = $\int$ u dv + $\int$ v du

$\int$ uv = $\int$ u dv + $\int$ v du

Dengan demikian, diperoleh suatu rumus sebagai berikut.

$\int$ u dv = uv – $\int$ v du

Dari rumus di atas terlihat bahwa integral dipisah menjadi 2 bagian, yaitu u dan dv (yang mengandung dx) sehingga disebut sebagai integral parsial. Untuk menggunakan rumus integral parsial, perlu diperhatikan bahwa bagian yang dipilih sebagai dv harus dapat diintegralkan dan $\int$ v du harus lebih sederhana (lebih mudah dikerjakan) daripada $\int$ u dv . Agar lebih memahami integral parsial, perhatikan contoh berikut.

Contoh Soal 16 :

Tentukan $\int x\sqrt{x}\,dx$.

Penyelesaian :

Berdasarkan rumus integral parsial maka integral tersebut dibagi menjadi dua bagian, yaitu u dan dv. Untuk menentukan bagian u dan dv ada beberapa kemungkinan sehingga harus dipilih yang paling tepat sesuai dengan kaidah di atas.

Kemungkinan yang dapat terjadi untuk memilih u dan dv adalah sebagai berikut.

a. Misalkan u = x $\sqrt{x}$ dan dv = dx.

Oleh karena itu, du = $\sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}}$ dx dan v = x sehingga :

$\int$ x $\sqrt{x}$ dx = x $\sqrt{x}$ (x) - $\int$ x ($\sqrt{x} - \frac{x}{2\sqrt{x}}$) dx

Dari integral di atas terlihat bahwa bentuk tersebut sulit untuk ditentukan penyelesaiannya. Oleh karena itu, untuk pemisalan u dan dv di atas ditolak.

b. Misalkan u = $\sqrt{x}$ dan dv = x dx.

Dengan demikian, diperoleh du = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ dx dan v = $\int$ x dx = ½ x^2.

sehingga :

v = $\int$ x dx =

Dari bentuk integral di atas maka terlihat bahwa bentuk tersebut juga sulit ditentukan penyelesaiannya. Jadi, untuk pemisalan u dan dv di atas ditolak.

c. Misalkan u = x dan dv = $\sqrt{x}$ dx

Untuk u = x ↔ du = dx
Untuk dv = $\sqrt{x}$ dx ↔ $\int$ dv = $\int$ $\sqrt{x}$ dx ↔ v = 2/3 $x^{\frac{2}{3}}$

Oleh karena itu,

$$\int x\sqrt{x}\,dx = x \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\right] + c$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{6}{15}x^{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}x^{2}\sqrt{x} + c$$

Contoh Soal 17 :

Tentukan $\int x\sqrt{1+x}\,dx$

Jawaban :

Misalkan u = x ↔ du = dx.

dv = $\sqrt{1+x}$ dx

↔ ∫ dv = $\int (1+x)^{\frac{1}{2}}$ dx

↔ $v = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$

Oleh karena itu,

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = x\left(\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right) - \int \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + c$$

Ada suatu metode yang mempermudah pengerjaan integral parsial yang disebut dengan aturan Tanzalin. Aturan Tanzalin digunakan untuk menyelesaikan $\int u\ dv$ apabila turunan ke-k dari fungsi u(x) bernilai nol dan integral ke-k dari fungsi v = v(x) ada.

Perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh Soal 18 :

Tentukan hasil integral $\frac{8x^2}{(x+2)^4}$ dx.

Jawaban :

$\frac{8x^2}{(x+2)^4}$ dx

$\leftrightarrow 8 \int x^2(x+2)^{-4}$ dx

Untuk integral di atas, bagian yang lebih mudah didiferensialkan adalah x^2. Jadi, u = x^2 dan dv = $(x + 2)^{-4}$ dx. Kita gunakan aturan Tanzalin untuk mengerjakan integral tersebut.

Didiferensialkan		Diintegralkan
x^2	$+$	$(x+2)^{-4}$
$2x$	$-$	$-\frac{1}{3}(x+2)^{-3}$
2	$+$	$\frac{1}{6}(x+2)^{-2}$
0	$-$	$-\frac{1}{6}(x+2)^{-1}$

$$\int \frac{8x^2}{(x+2)^4}\,dx = 8\left[x^2\left(-\frac{1}{3}(x+2)^{-3}\right) - 2x\left(\frac{1}{6}(x+2)^{-2}\right) + 2\left(-\frac{1}{6}(x+2)^{-1}\right)\right] + c$$

$$= -\frac{8}{3}x^2(x+2)^{-3} - \frac{8}{3}x(x+2)^{-2} - \frac{8}{3(x+2)} + c$$

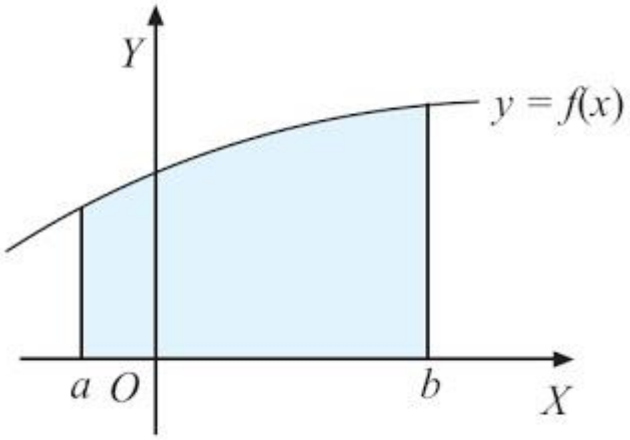
F. Penggunaan Integral Tertentu

Pada pembahasan sebelumnya, kita telah mempelajari teori-teori yang berhubungan dengan integral tertentu. Sekarang kita akan mempelajari beberapa penggunaan integral tertentu, yaitu untuk menentukan luas suatu daerah dan volume benda putar jika suatu daerah diputar mengelilingi sumbu tertentu.

1. Luas Daerah yang Dibatasi oleh Kurva y = f(x), Sumbu X, Garis x = a, dan Garis x = b

a. Untuk f(x) ≥ 0 pada Interval a ≤ x ≤ b

Misalkan L adalah luas daerah pada bidang Cartesius yang dibatasi oleh kurva y = f(x), sumbu X, garis x = a dan garis x = b seperti gambar di bawah ini.



Gambar 10. Luas Daerah Untuk f(x) $\geq$ 0 pada Interval a $\leq$ x $\leq$ b.

Luas daerah L ditentukan oleh rumus berikut.

L = $\int_a^b$ f (x) dx

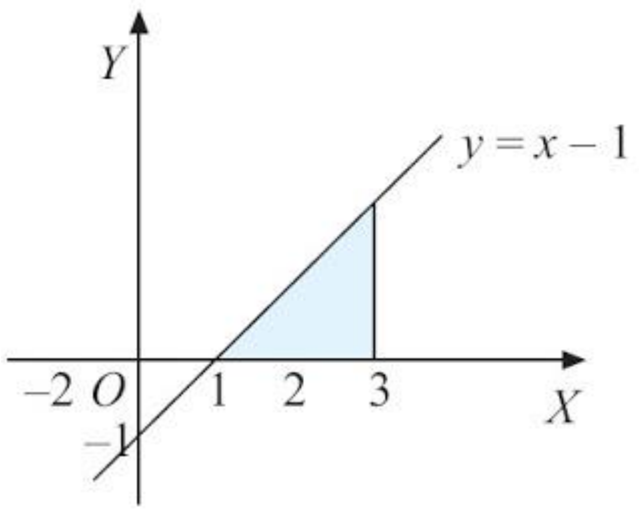
Contoh Soal 19 :

Suatu daerah dibatasi oleh kurva y = x – 1, x = 1, x = 3, dan sumbu X. Lukislah kurva tersebut dan arsir daerah yang dimaksud, kemudian tentukan luasnya.

Jawaban :

Kurva daerah yang dimaksud seperti Gambar 11.

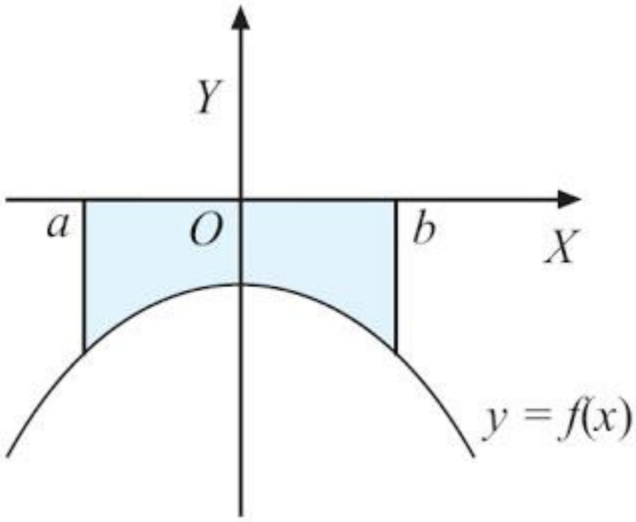
$$
\begin{aligned}
L &= \int_1^3 (x-1)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^3 \\
&= \left[\frac{1}{2}(3)^2 - 3\right] - \left[\frac{1}{2}(1)^2 - 1\right] \\
&= \left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2
\end{aligned}
$$



Gambar 11. Suatu daerah dibatasi oleh kurva y = x – 1, x = 1, x = 3, dan sumbu X.

b. **Kurva f(x) ≤ 0 pada Interval a ≤ x ≤ b**

Misalkan L adalah luas daerah pada bidang Cartesius yang dibatasi oleh kurva y = f(x), sumbu X, garis x = a, dan garis x = b seperti Gambar 12.



Gambar 12. Luas daerah Kurva f(x) $\leq$ 0 pada Interval a $\leq$ x $\leq$ b.

Dari gambar di samping, nilai integral tertentu $\int_a^b$ f (x) dx akan bernilai negatif. Padahal luas suatu daerah harus bernilai positif sehingga rumus untuk menghitung luas daerah di bawah sumbu X sebagai berikut.

L = - $\int_a^b$ f(x) dx = $\int_b^a$ f(x) dx

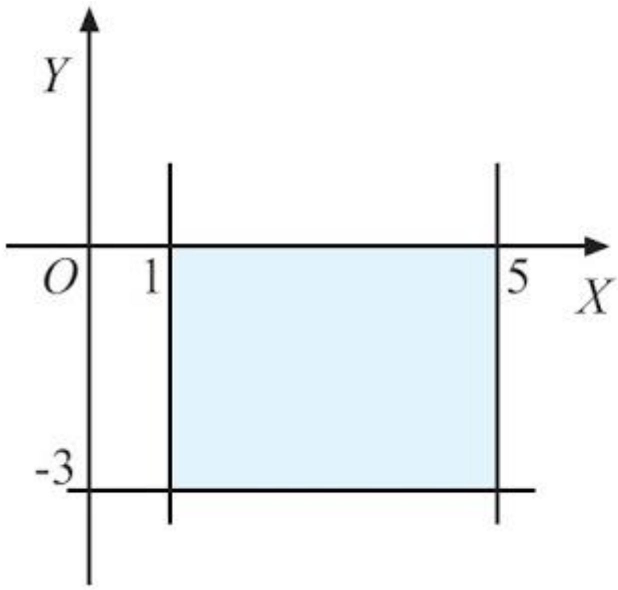
Contoh Soal 20 :

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh

a. y = f(x) = –3, sumbu X, garis x = 1 dan x = 5;
b. y = f(x) = 1 – x^2 , sumbu X, garis x = 1, dan x = 2.

Jawaban :

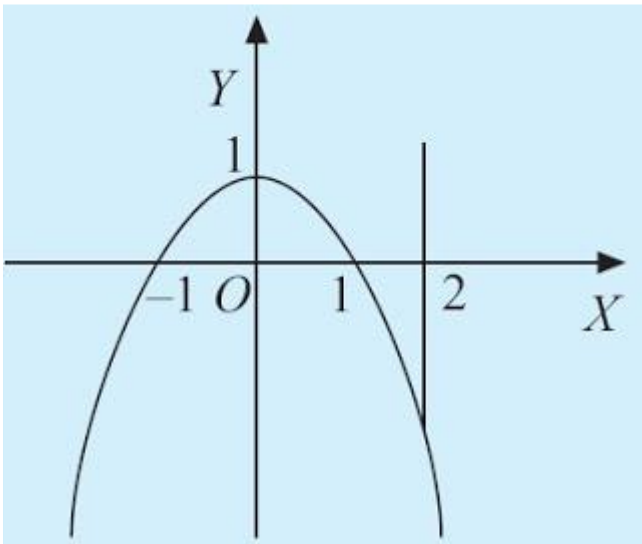
a. y = f(x) = –3 dapat digambarkan seperti Gambar 13.



Gambar 13. kurva y = f(x) = –3.

Karena daerah yang dimaksud berada di bawah sumbu X maka :

b. Kurva $y = 1 - x^2$ tampak seperti Gambar 14.



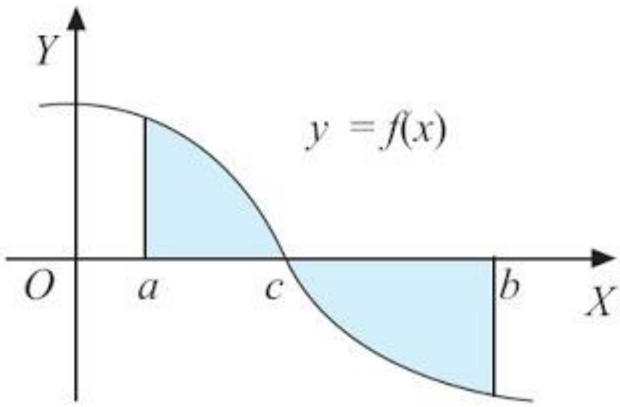
Gambar 14. Kurva $y = 1 - x^2$

Karena daerah yang akan dicari luasnya berada di bawah sumbu X maka luasnya adalah :

$$
\begin{aligned}
L &= -\int_{1}^{2} f(x) \\
&= \int_{2}^{1} (1 - x^2)\, dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{2}^{1} \\
&= \left[1 - \frac{1}{3}(1)^3 \right] - \left[2 - \frac{1}{3}(2)^3 \right] \\
&= \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = 1\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

c. **Untuk f(x) ≥ 0 pada Interval a ≤ x ≤ c dan f(x) ≤ 0 pada Interval c ≤ x ≤ b**

Misalkan L luas daerah yang dibatasi oleh y = f(x), sumbu X, garis x = a, dan garis x = b seperti gambar di bawah ini.



Gambar 15. Luas daerah untuk f(x) ≥ 0 pada Interval a ≤ x ≤ c dan f(x) ≤ 0 pada Interval c ≤ x ≤ b.

Luas daerah L tidak dapat dihitung menggunakan rumus $\int_a^b f(x)\, dx$ karena luas daerah L terbagi menjadi dua bagian, yaitu di atas dan di bawah sumbu X sehingga akan memberikan hasil yang salah. Cara menghitung luas daerah L adalah dengan membagi luas daerah L menjadi dua bagian, yaitu L_1 sebagai luas daerah yang berada di atas sumbu X dan L_2 sebagai luas daerah yang berada di bawah sumbu X. Oleh karena itu, luas seluruh bagian yang diarsir adalah

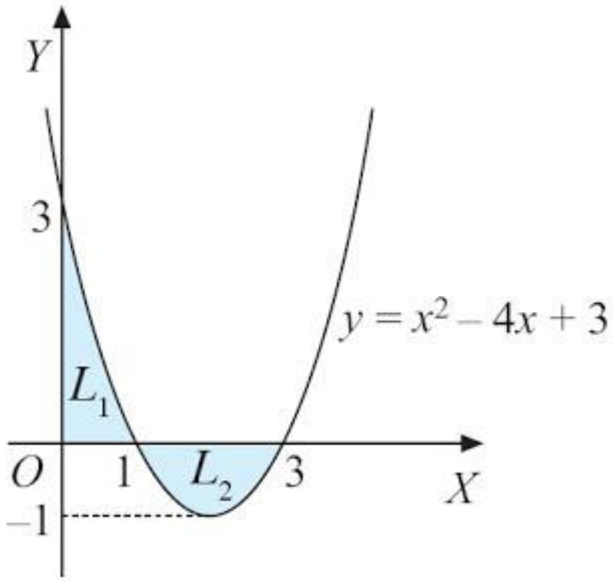
$$L = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Contoh Soal 21 :

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 4x + 3$, sumbu X, sumbu Y, dan $x = 3$.

Jawaban :

Gambar kurva $y = x^2 - 4x + 3$ tampak di bawah ini.



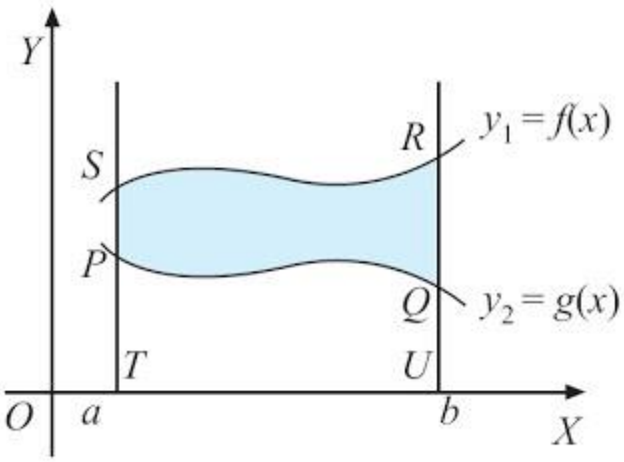
Gambar 16. kurva $y = x^2 - 4x + 3$

Grafik memotong sumbu X sehingga diperoleh titik potong (1, 0) dan (3, 0). Daerah yang dimaksud adalah daerah yang diarsir. Kita bagi daerah tersebut menjadi dua bagian yaitu L_1 dan L_2. Karena L_2 terletak di bawah sumbu X (bernilai negatif), L_2 diberi tanda negatif (agar menjadi positif). Oleh karena itu, luas daerah yang dicari adalah sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\text{Luas} &= L_1 + L_2 \\
&= \int_0^1 f(x)\,dx - \int_1^3 f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx + \int_3^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_3^1 \\
&= \left[\frac{1}{3}(1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) - 0\right] + \left[\frac{1}{3}(1)^3 - 2(1)^2 + 3(1)\right] \\
&\quad - \left[\frac{1}{3}(3)^3 - 2(3)^2 + 3(3)\right] \\
&= 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3} \text{ satuan luas}
\end{aligned}
$$

2. **Luas Daerah antara Dua Kurva**

Misalkan L adalah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$ dan $y_2 = g(x)$, dengan $f(x) > g(x)$, $x = a$, dan $x = b$ seperti pada Gambar 17.



Gambar 17. Luas daerah antara dua kurva.

Luas daerah tersebut dapat dihitung dengan cara berikut.

L = Luas TURS – Luas TUQP

$$L = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

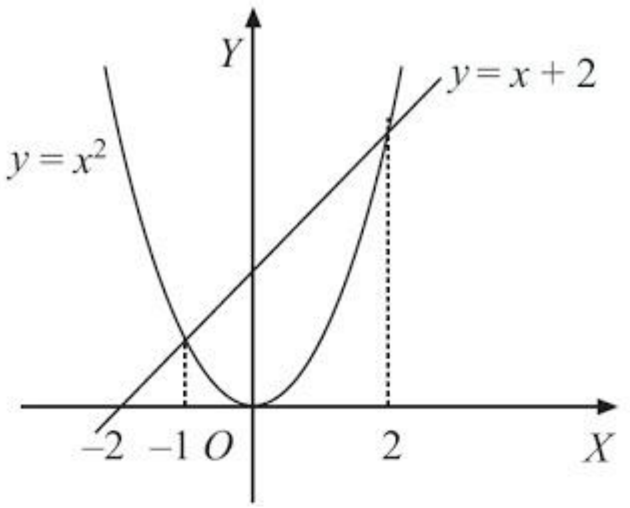
$$L = \int_a^b \{ f(x)\ g(x)\}\, dx$$

$$L = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx$$

Jadi, luas daerah antara dua kurva $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, $x = a$, dan $x = b$ adalah sebagai berikut.

Contoh Soal 22 :

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = x + 2$.



Gambar 18. luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = x + 2$.

Penyelesaian :

Batas-batas x diperoleh dengan menentukan titik-titik potong kedua kurva, yaitu :

$x^2 = x + 2$

$\leftrightarrow x^2 – x – 2 = 0$

$\leftrightarrow (x + 1)(x – 2) = 0$

$\leftrightarrow x = –1$ atau $x = 2$

Untuk $x = –1$ maka nilai $y = 1$.

Untuk x = 2 maka nilai y = 4.

Jadi, titik potong kedua kurva, yaitu x = –1 dan x = 2 merupakan batas pengintegralan.

$$L = \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{2}$$

$$= (2 + 4 - \frac{8}{3}) - (\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3})$$

$$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \text{ satuan luas}$$

Contoh Soal 23 :

Tentukan luas daerah yang dibatasi parabola $y = x^2$ dan garis $2x – y + 3 = 0$.

Jawaban :

$y_1 = x^2$ dan $2x – y + 3 = 0 \leftrightarrow y_2 = 2x + 3$.
$y_1 – y_2 = 0$
$x^2 – (2x + 3) = 0$
$x^2 – 2x – 3 = 0 \leftrightarrow$ a = 1, b = –1, dan c = –3.
$D = (–2)^2 – 4 . 1 . (–3)$
= 4 + 12
= 16

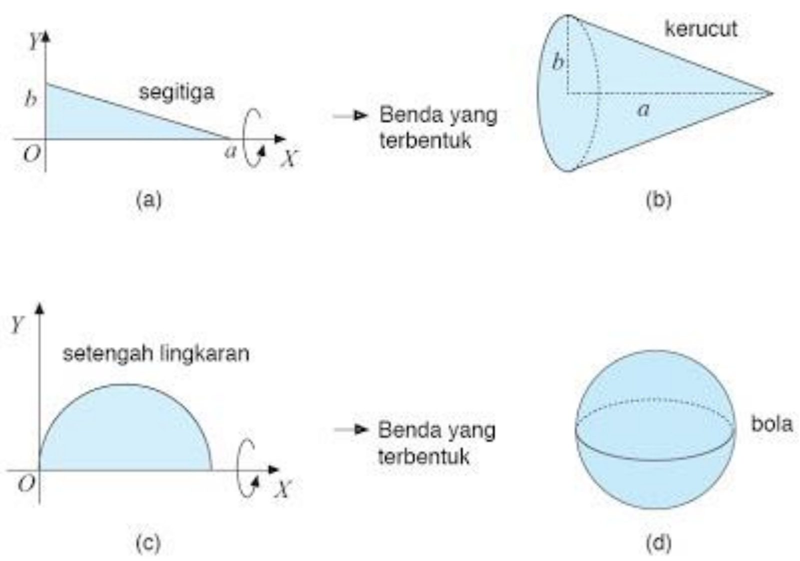
Luas = $\frac{D\sqrt{D}}{6a^2} = \frac{16\sqrt{16}}{6.1^2} = \frac{16x4}{6} = \frac{32}{3}$ *satuan luas*

(Coba kalian tunjukkan daerah yang dimaksud dengan menggambarkannya pada bidang koordinat.)

3. **Volume Benda Putar (Pengayaan)**

Benda putar adalah suatu benda yang terbentuk dari suatu daerah tertutup pada bidang Cartesius dan diputar mengelilingi sumbu X atau sumbu Y dengan satu putaran penuh (360^o).

Misalnya:

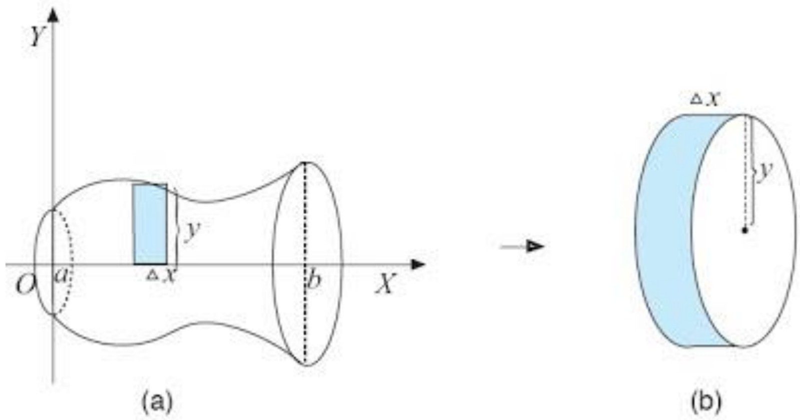


Gambar 19. Benda putar.

a. **Daerah Dibatasi Kurva y = f(x), Sumbu X atau Sumbu Y, Garis x = a, dan Garis x = b**

1) Perputaran Mengelilingi Sumbu X

Misalkan suatu daerah dibatasi kurva y = f(x), sumbu X, garis x = a, dan garis x = b diputar mengelilingi sumbu X seperti pada Gambar 20 (a).



Gambar 20. Perputaran Mengelilingi Sumbu X.

Jika benda putar tersebut dipotong dengan tebal potongan setebal Δx dari interval $a \le x \le b$, akan terbentuk n buah keping. Keping tersebut berupa silinder dengan jari-jari $y = f(x_i)$ dan tinggi (tebalnya) Δx . Perhatikan Gambar 20 (b).

Volume keping ke-i adalah $V_i = \pi y_i^2 \Delta x$, sedangkan volume semua benda adalah jumlah volume keping sebanyak n buah, yaitu :

$$V = \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x$$

Jika $n \to \infty$ maka $\Delta x \to 0$ sehingga diperoleh :

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x = \int_a^b \pi y^2 \Delta x$$

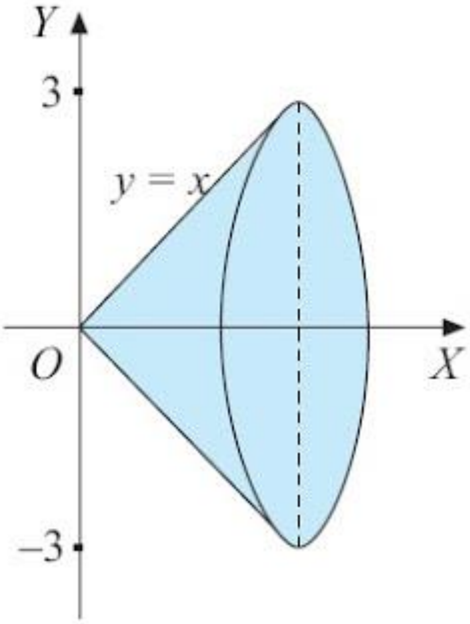
Dengan demikian, dapat kita simpulkan sebagai berikut.

Volume benda putar yang terjadi dari daerah yang dibatasi oleh y = f(x), sumbu X, garis x = a, dan garis x = b diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^o , volumenya adalah :

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

Contoh Soal 24 :

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika bidang datar yang dibatasi oleh kurva y = x, sumbu X, dan garis x = 3 diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^o .



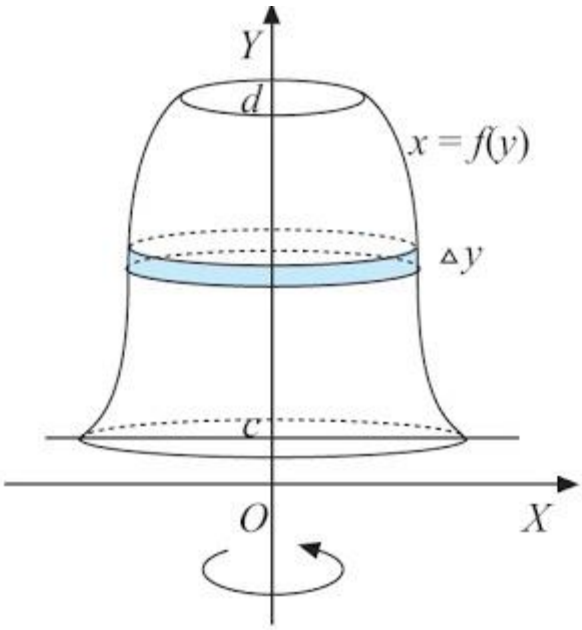
Gambar 21. Volume benda putar yang terjadi jika bidang datar yang dibatasi oleh kurva y = x, sumbu X, dan garis x = 3.

Jawaban :

Volume = 9 π satuan volume

2) Perputaran Mengelilingi Sumbu Y

Misalkan suatu daerah dibatasi kurva y = f(x), sumbu Y, garis y= c, dan y = d diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360^o , akan membentuk benda putar seperti gambar di bawah ini.



Gambar 22. Perputaran Mengelilingi Sumbu Y.

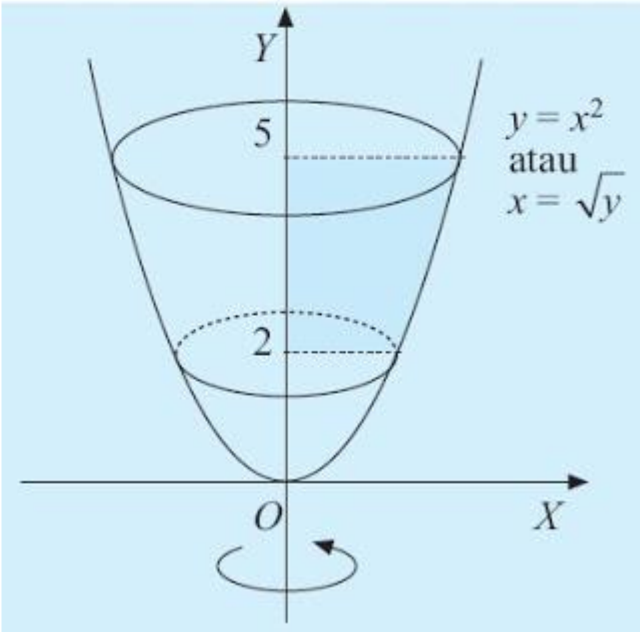
Cara menentukan volume benda putar dari daerah yang diputar mengelilingi sumbu Y sama seperti menentukan volume benda putar yang mengelilingi sumbu X.

Jika daerah yang dibatasi oleh x = f(y), sumbu Y, garis y = c, dan garis y = d diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360^o , volume benda putarnya adalah :

$$V = \pi \int_c^d x^2 \, dy$$

Contoh Soal 25 :

Tentukan volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh sumbu Y, kurva y = x^2 , garis y = 2, dan garis y = 5 diputar mengelilingi sumbu Y.



Gambar 23. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh sumbu Y, kurva $y = x^2$, garis y = 2, dan garis y = 5.

Jawaban :

$$V = \pi \int_c^d x^2 \, dy$$

$$= \pi \int_2^5 (\sqrt{y})^2 \, dy$$

$$= \pi \int_2^5 y \, dy$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_2^5$$

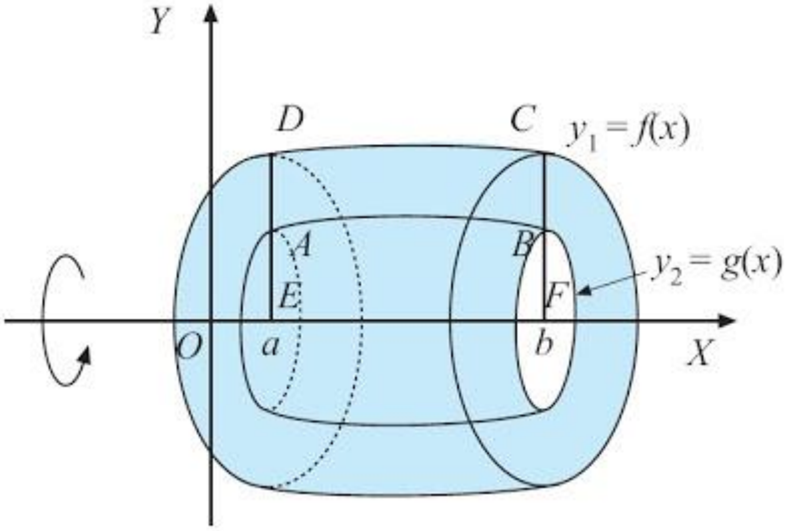
$$= \pi \left[\frac{1}{2}(5)^2 - \frac{1}{2}(2)^2 \right]$$

$$= \frac{21}{2} \pi \text{ satuan volume}$$

b. **Volume Benda Putar Daerah di antara Dua Kurva**

1) Perputaran Mengelilingi Sumbu X

Dimisalkan A adalah daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva-kurva y_1 = f(x) dan $y_2 = g(x)$ dengan $| f(x) | \geq | g(x) |$ pada interval $a \leq x \leq b$. Daerah yang terbentuk diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^o sehingga terbentuk suatu benda putar yang tengahnya kosong. Perhatikan gambar di bawah ini.



Gambar 24. Volume Benda Putar Daerah di antara Dua Kurva, Perputaran Mengelilingi Sumbu X.

Volume benda yang terbentuk dari daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, garis $x = a$ dan $x = b$ adalah :

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\, dx - \pi\int_a^b (g(x))^2\, dx$$

$$= \pi\int_a^b ((f(x))^2 - ((g(x))^2)dx$$

$$= \pi\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

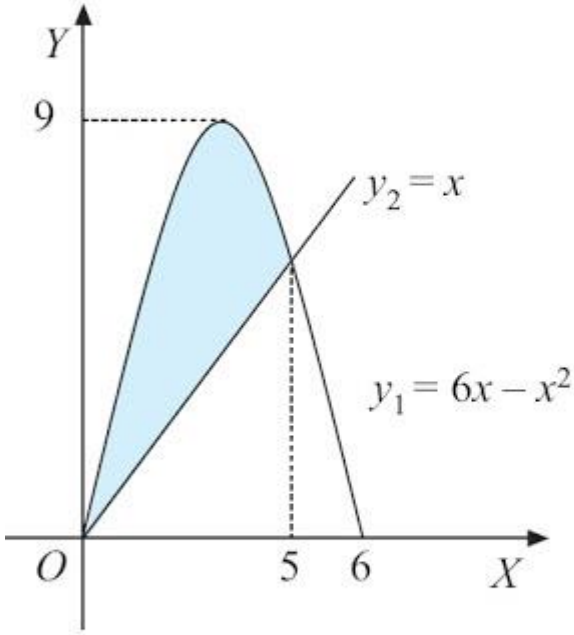
Dengan demikian, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y_1 = f(x)$, kurva $y_2 = g(x)$, garis $x = a$, dan garis $x = b$, dengan $| f(x) | \geq | g(x) |$ diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^o maka volume benda putar yang terjadi adalah :

$V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$ atau $V = \pi \int_a^b [(f (x))^2 - (g(x))^2]\, dx$

Contoh Soal 26 :

Tentukan volume benda putar yang terjadi, jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 6x - x^2$ dan $y = x$ diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^o



Gambar 25. Volume benda putar yang terjadi, jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 6x - x^2$ dan $y = x$.

Jawaban :

Perpotongan antara kurva $y = 6x - x^2$ dan $y = x$ adalah sebagai berikut.

$y_1 = y_2$
$\leftrightarrow 6x - x^2 = x$
$\leftrightarrow 5x - x^2 = 0$
$\leftrightarrow x(5 - x) = 0$
$\leftrightarrow x = 0$ atau $x = 5$

Nilai $x = 0$ dan $x = 5$ digunakan sebagai batas-batas integrasi volume benda putarnya. Dengan demikian, diperoleh :

$$V = \pi\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

$$= \pi\int_0^5 [(6x - x^2)^2 - x^2]\, dx$$

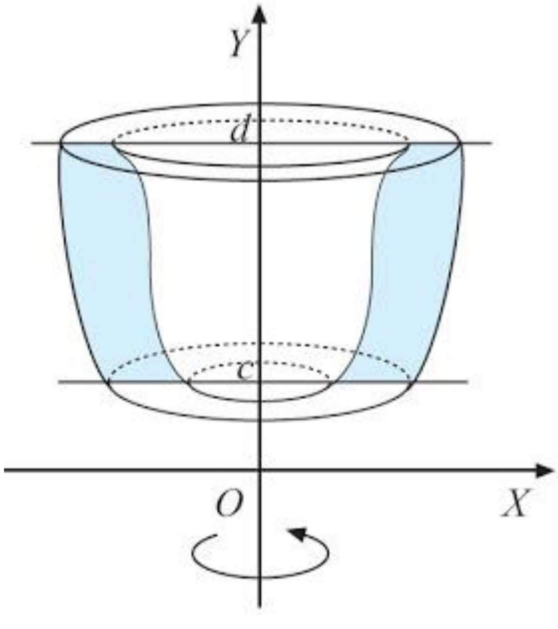
$$= \pi\int_0^5 (x^4 - 12x^3 + 35x^2)\, dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{35}{3}x^3\right]_0^5 = 208\frac{1}{3}\pi \text{ satuan volume}$$

2) Perputaran Mengelilingi Sumbu Y

Misalkan A adalah daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva-kurva x_1 = f(y) dan x^2 = g(y) dengan |f(y)| ≥ |g(y)| pada interval :
c ≤ y ≤ d.

Cara yang sama dapat diterapkan untuk mencari volume benda putar yang dibatasi dua kurva x_1 = f(y), x_2 = g(y), garis y = c dan y = d seperti saat kita menentukan volume benda putar jika diputar mengelilingi sumbu X.



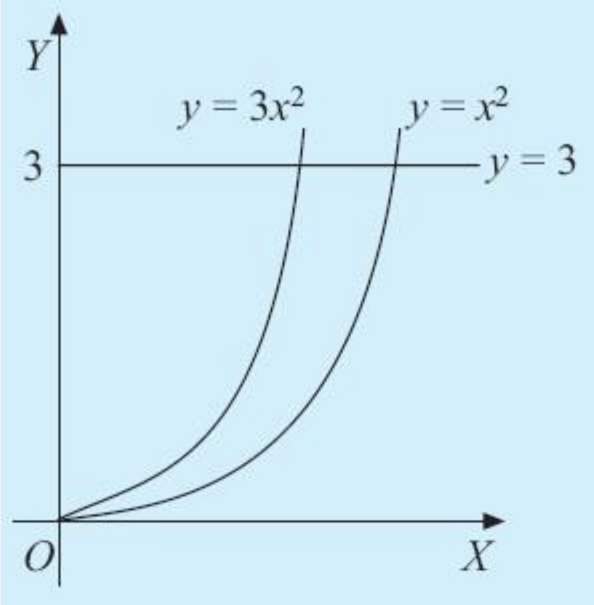
Gambar 26. Volume Benda Putar Daerah di antara Dua Kurva Perputaran Mengelilingi Sumbu Y.

Dengan demikian, dapat ditunjukkan bahwa volume benda putar itu adalah sebagai berikut.

Jika suatu daerah yang dibatasi oleh kurva $x_1 = f(y)$, kurva $x_2 = g(y)$, garis $y = c$, dan garis $y = d$ dengan $|f(y)| \geq |g(y)|$ diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360^o, volume benda putar yang terjadi adalah :

Contoh Soal 27 :

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, $y = 3x^2$, dan $y = 3$ di kuadran pertama diputar mengelilingi sumbu Y sejauh 360^o.



Gambar 27. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, $y = 3x^2$, dan $y = 3$.

Pembahasan :

Kurva $y = x^2 \rightarrow x_1 = \sqrt{y} \rightarrow x_1^2 = y$

Kurva $y = 3x^2 \leftrightarrow x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}y}$

$\leftrightarrow x_2^2 = 1/3\ y$

Dengan demikian, volume benda putarnya adalah :

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{c}^{d}(x_1^2 - x_2^2)\, dy \\
&= \pi\int_{0}^{3}\left(y - \frac{1}{3}y\right) dy \\
&= \pi\int_{0}^{3}\frac{2}{3}y\, dy \\
&= \pi\left[\frac{1}{3}y^2\right]_0^3 \\
&= \pi\left[\frac{1}{3}(3)^2 - \frac{1}{3}(0)\right]
\end{aligned}
$$

V = 3π satuan volume